Les propriétés des vecteurs I

1. ∃ addition
   1. Associativité
   2. Commutativité
2. ∃ zéro et d'élément inverse
3. Multiplication par un scalaire, distributivité sur les vecteurs et les scalaires

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

$$\forall\vec{a}\quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$$

$$\forall-\vec{a}\quad \vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=\vec{0}$$

$$\lambda\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$$

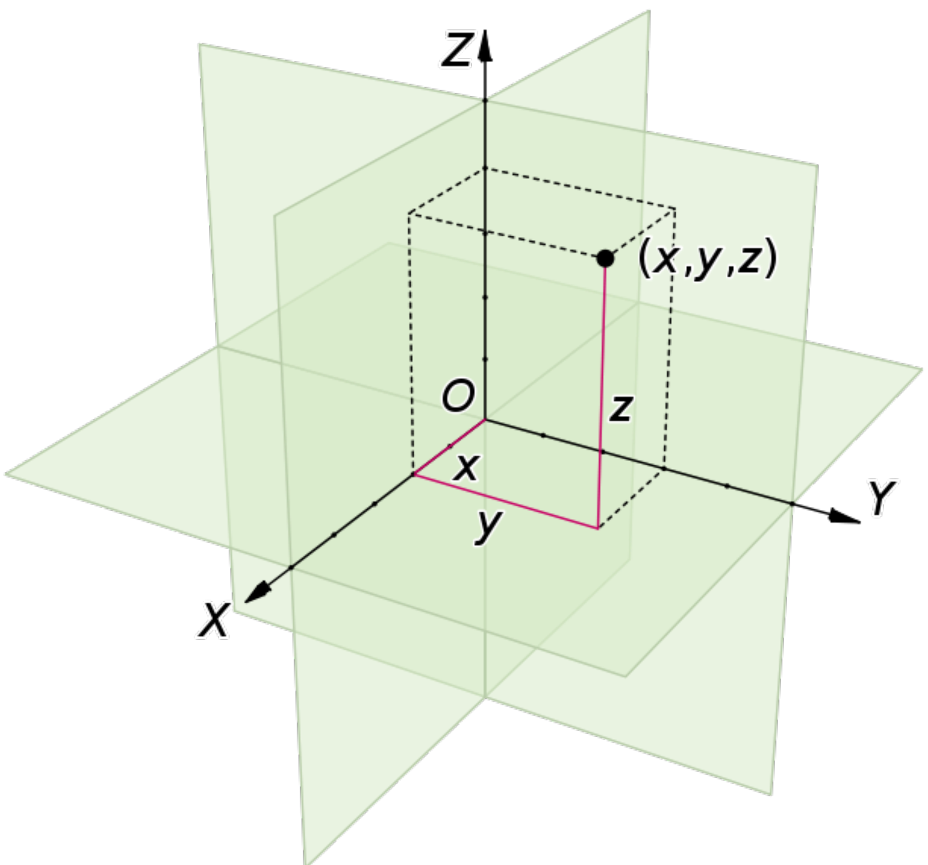
$$\lambda\nu\left(\vec{a}\right)=\lambda\left(\nu\vec{a}\right)$$

$$(\lambda+\nu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\nu\vec{a}$$

$$1\vec{a}=\vec{a}$$

Représentation des vecteurs

Le plupart de temps nous utilisons le système de coordonnées cartésien pour représenter nos vecteurs. L'addition, la multiplication par scalaire et le produit scalaire sont définis comme suit :



$$\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} \quad \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 & \lambda y_1 & \lambda z_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 \vec{r}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

image: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Coord_system_CA_0.svg

Représentation des vecteurs

Il est utile d'introduire les vecteurs unitaires, qui n'ont pas d'unités et dont la longueur est 1 :

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\hat{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\hat{z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car ils donnent une signification aux coordonnées d'un vecteur :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

Les propriétés des vecteurs II : produit scalaire

Pour les vecteurs que nous utilisons, il existe aussi le produit scalaire dont les propriétés importantes sont :

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{b} \qquad \vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c} \qquad \forall \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \quad \vec{a}\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

Le produit scalaire définit aussi la norme de nos vecteurs:

$$\left\|\vec{a}\right\|^2 \coloneqq \vec{a}\vec{a}$$

Calculer le produit scalaire

- Si les modules des vecteurs et l'angle entre les deux est donné :

$$\vec{a}\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\alpha$$

- si les coordonnées sont donnés :

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Produit scalaire

- Utile pour calculer :
  - le module d’un vecteur
  - l’angle entre deux vecteurs
  - le composant d’un vecteur portant dans une direction
  - orthogonalité de vecteurs

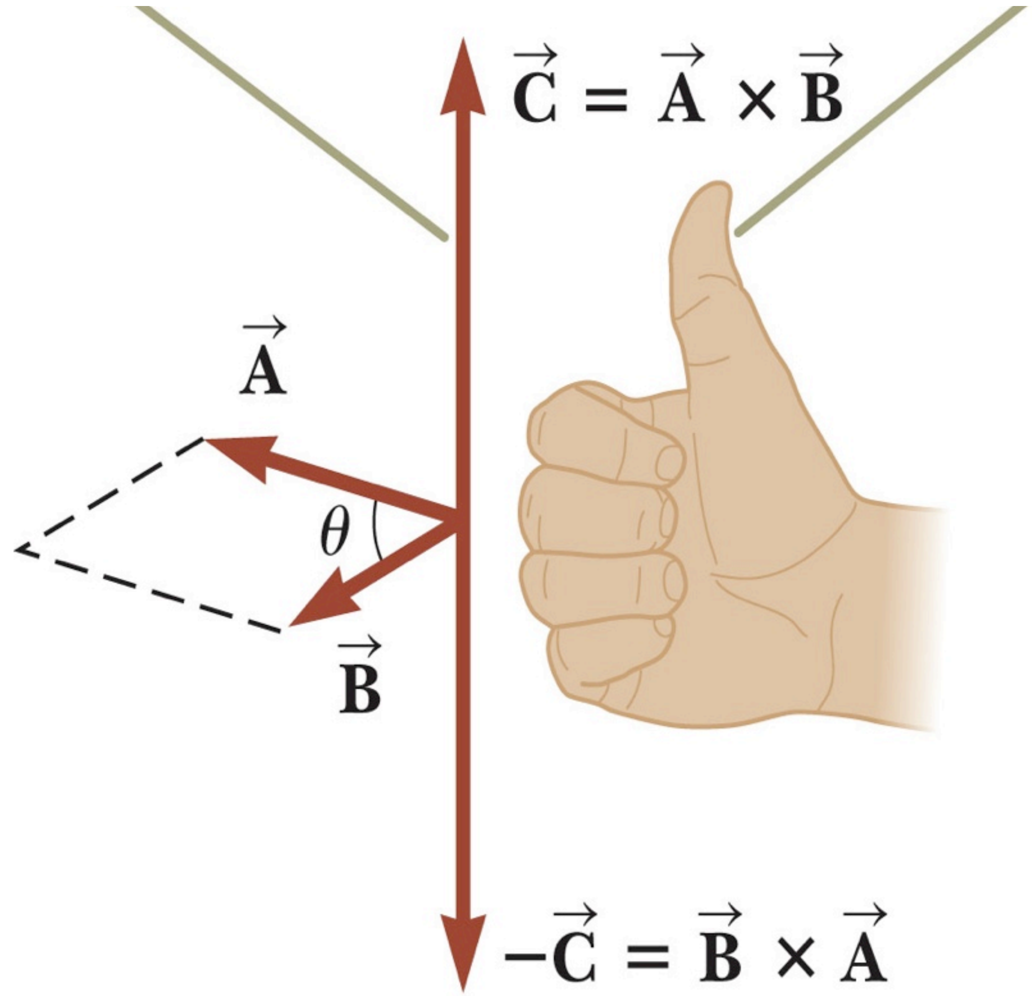
Produit vectoriel

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\left\|\vec{a} \times \vec{b}\right\| = \left\|\vec{a}\right\| \cdot \left\|\vec{b}\right\| \cdot \sin\theta$$

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$$



Produit vectoriel en coordonnées cartésiennes

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{matrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} & \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} & \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_x & a_y & a_z & a_x & a_y & a_z & a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z & b_x & b_y & b_z & b_x & b_y & b_z \end{matrix}$$

$$\left(a_y b_z - a_z b_y\right)\hat{x} + \left(a_z b_x - a_x b_z\right)\hat{y} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\hat{z}$$